Theoretische Fragen zu ausgewählten Themen in Lineare Algebra

$\{$ Oren Halvani, Jonathan Weinberger $\} \subset$ TU Darmstadt

25. Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Determinanten

1. Wie lässt sich die Determinate einer oberen, bzw. unteren Dreiecksmatrix berechnen ?
2. Wieviele 3-reihige Unterdeterminanten besitzt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$?
3. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{1000\times 1000}$ mit den Einträgen 1. Wie lautet $\det(A)$?
4. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit n $\neq m$. Existiert für A eine Determinante ?
5. Gegeben sei die Einheitsmatrix E, wie lautet $\det(E)$?
6. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweise: Falls $\det(A) = 0 \Rightarrow \operatorname{adj}(A) = 0$.
7. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweise: $\det(\operatorname{adj}(A)) = (\det\ (A)^{n-1}$.
8. Gegeben sei $\det(A) = 3$ and $\det(B) = 4$, wie lautet $\det(A^{-1}BA^3B^2)$?
9. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeige $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.
10. Zeige an einem Beispiel, dass $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ ist, wobei $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
11. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beantworte die folgenden **voneinander unabhängigen** Fragen..
    - Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\det(A)$ und A^{-1} (also der Inverse von A) ?
    - Was ist der Zusammenhang von $\det(A)$ und $\lambda(A)$ (also Eigenwerte von A) ?
    - Sei $\det(A) = 0$. Ist A regulär oder singulär ?
    - Es existiert in A eine Nullzeile (also eine Zeile deren Einträge ausschließlich aus Nullen besteht). Wie lautet $\det(A)$?
    - Sei A regulär, was bedeutet das für die Spaltenvektoren von A bzgl. der linearen Abhängigkeit ?
    - Sei A orthogonal, wie lautet $\det(A)$?
    - Sei A regulär, wir vertauschen eine beliebige Spalte in A. Was beutet das für die Determinante von A ?
    - Wir transponieren A (drehen also die Matrix um 90 Grad nach rechts) sodas wir dadurch A^T erhalten. Gilt $\det(A^T) = \det(A)$?
    - Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Determinante = $\det(A)$ und den Rang = $\operatorname{rang}(A)$?
    - Beweise oder widerlege folgende Behauptung für A. „Sei $\det(A) = 0$. Es gilt $\det(A) \Rightarrow (A =$ invertierbar)“.
12. Gegeben sei eine singuläre Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeige mithilfe der Cramersche' Regel, warum zu M keine Inverse M^{-1} existiert.
13. Gegeben seien die beiden Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweise folgende Behauptung: $(\det(A \cdot B) = 0) \Rightarrow$ (entweder A oder B singuär). Wie sieht es mit der Umkehrung aus, gilt: (entweder A oder B singuär) $\Rightarrow (\det(A \cdot B) = 0)$?
14. Gegeben seien die Matrizen: $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Matrix B ist singulär, alle anderen Matrizen regulär. Ist $\det(A \cdot B \cdot C \cdot D)$ ebenfalls regulär ?
15. Gegeben seien die beiden Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir betrachten die Matrix B. Die erste Zeile ist das Vielfache der letzten Zeile in B. Wie lautet $\det(A \cdot B)$?
16. Folgendes sei über die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bekannt: $\det(A) \neq 0$ sowie die Information, das die Spaltenvektoren von A nicht linear abhängig sind. Lässt sich hieraus folgern, daß die Zeilenvektoren ebenfalls nicht linear abhängig sind ?
17. Gibt es einen Zusammenhang zwischen Determinanten und linearen Gleichungssystemen bzgl. der Lösbarkeit ?

18. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wieviele Nulleinträge kann A maximal besitzen, sodass stets $\det(A) \neq 0$ gilt ?

19. Was ist der Zusammenhang zwischen positiver Definitheit und allen Unterdeterminanten (Hauptminoren) einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

20. Gegeben seien folgende Matrizen mit unterschiedlichen Größen:

    - $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$,
    - $B \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$,
    - $C \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$,
    - $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$,
    - $E \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$

    Zu welcher dieser Matrizen, lässt sich die Determinante mit der Sarrus Regel, bzw. Laplace Entwicklungssatz berechnen ?

21. Wir betrachten eine beliebig große Permutationsmatrix $P \in \mathbb{B}^{n \times n}$, wobei $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ Beweise oder widerlege: $\det(P) \notin \mathbb{B}$?

22. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Beweise folgende Aussage mithilfe der Laplace-Entwicklung. Falls: $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ für: i = 1, 2, 3, ..., n. Dann gilt $\det(A) \neq 0$.

23. Gilt die folgende Aussage ? Die Determinante einer Matrix ist eine Ähnlichkeitsinvariante. Das bedeutet: sind A und B zwei Matrizen, für die es eine invertierbare Matrix S gibt, so dass $B = SAS^{-1}$ gilt, so haben A und B dieselbe Determinante. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, beispielsweise hat jede Drehung Determinante 1.

24. Sei Q eine unitäre Matrix, welche zwei Werte kommen für $\det(Q)$ in Frage ?

25. Leite aus dem Determinantenmultiplikationssatz und der LR Zerlegung einer beliebig großen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Tatsache her, das die Gleichheit $\det(A) = \det(R) = r_{11} * r_{22} * r_{33} * ... * r_{nn}$ wobei: $r_{ii} \in R$ für i = 1, 2, ..., n gilt.

26. Entscheide für die folgenden Sätze ob sie wahr sind oder falsch sind.

    - Addiert man in einer Determinante die mit einem Faktor k multiplizierten Elemente einer Zeile oder Spalte zu den Elementen in einer anderen Zeile oder Spalte, so ändert die Determinante ihren Wert nicht.
    - Multipliziert man eine Zeile oder Spalte der Matrix mit k , dann muss die Determinante auch mit k multiplizieren.
    - Vertauscht man Zeilen der Matrix, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante nicht.
    - Das Produkt beider Matrizen: $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(A) > 0$ und $\det(B) > 0$ hat zur Folge das $\det(A \cdot B) > 0$.

27. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{\lambda \times \lambda}$. Entscheide für $\lambda \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., n\}$ wieviele Summanden die Determinante $\det(A)$ hat.

2 Eigenwerte

1. Was sind Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix ?
2. Was versteht man unter die Begriffe: „Algebraische und geometrische Vielfachheit“ im Bezug auf Eigenwerte ?
3. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Was haben spur($A$) und det($A$) im Bezug auf Eigenwerte gemeinsam ?
4. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entscheide welches der folgenden Aussagen wahr ist.
   Hinweis: Es gibt nur eine korrekte Antwort.

   Das Spektrum von A ist...

   - ...die Anzahl aller positiven Eigenwerte.
   - ...die Anzahl aller negativen Eigenwerte.
   - ...die Anzahl aller Eigenwerte.
   - ...max($| \lambda_i |$), also der größte Eigenwert von A.
5. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entscheide ob folgende **voneinander unabhängige** Behauptungen wahr oder falsch sind..

   - „A ist positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte $\lambda_i \in \lambda(A) > 0$. Ist jedoch eine gerade Anzahl von Eigenwerten negativ, gilt dasselbe.“
   - Sei A hermitisch, dann gilt: $\forall \lambda_i : \lambda_i \in \mathbb{R}$ für i $= 1, 2, ..., n$ (also alle Eigenwerte reel).
   - Sei A symmetrisch, dann gilt A positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ der kleinste Eigenwert $\lambda_n >= 0$ ist.
   - A hat n Eigenwerte und n linear unabhängige Eigenvektoren.
   - A und A^T haben die gleichen Eigenwerte.
   - Die Dimension des Kerns von A ist kleiner oder gleich der des Bildes.
   - Die Spalten der Matrix A sind ein Erzeugendensystems des Bildes von A.
6. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entscheide jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Falls A...

   - symmetrisch,
   - positiv symmetrisch,
   - orthogonal,
   - hermitsch,
   - normal,

   ist, dann sind alle Eigenwerte von A reell.

3 Definitheit

1. Gegeben sei die positiv definite und symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ist die Inverse von A, also A^{-1} ebenfalls positiv definit ?

2. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, weiterhin seien gegeben: $A = A^T$ (A ist also symmetrisch) sowie folgende Diagonalelemente diag(A) = { 7, 1, 3, -6, 9, -2, 5, ..., n}. Aus welchen Grund ist A **nicht** positiv definit ?

3. Es ist bekannt das die Hesse-Matrix symmetrisch ist. Wir befassen uns mit der Frage, wie man feststellen kann, ob eine symmetrische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ positiv oder negativ definit ist, ohne die Eigenwerte bestimmen zu müssen. Bestimme welche der folgenden Aussagen bzgl. der Matrix A wahr sind:

   - Eine solche Matrix ist stets über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.
   - Eine solche Matrix kann nur reelle Eigenwerte haben.
   - Eine solche Matrix hat stets n verschiedene Eigenwerte.
   - Ist eine solche Matrix positiv definit, so ist sie ähnlich zur Einheitsmatrix.
   - Ist eine solche Matrix positiv definit, so ist sie kongruent zur Einheitsmatrix.

4. Gegeben sei die Matrix $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entscheide für die folgenden Sätze ob sie wahr sind oder falsch.

   - Sei A symmetrisch. Treten in A sowohl positive als auch negative Werte auf der **Hauptdiagonalen** auf, so ist A notwendiger Weise indefinit.
   - Sei A symmetrisch mit positiven Hauptdiagonaleinträge. Ist es möglich das A **nicht** positiv definit ist ?
   - Sei A symmetrisch und enthalte ausschließlich positive Einträge. Ist es möglich das A indefinit ist ?
   - A enthalte **einige** negative Einträge (nicht notwendigerweise auf der Hauptdiagonalen). Kann A positiv definit sein ?
   - A enthalte **ausschließlich** negative Einträge. Ist A indefinit ?
   - Seien A und B positiv definit, ist dann das Produkt der beiden wieder positiv definit ? Seien A und B nun zusätzlich symmetrisch, ist das Produkt der beiden ebenfalls symmetrisch **und** positiv definit ?
   - Um zu zeigen, dass A positiv definit ist, kann man zeigen, dass alle Diagonalelemente der oberen Dreiecksmatrix bei einer LR Zerlegung positiv sind.
   - Sei A positiv definit, dann sind alle Hauptunterdeterminanten $\det(A_{(k)})$ strikt positiv.
   - Sind alle Hauptunterdeterminanten $\det(A_{(k)})$ strikt positiv, so ist A positiv definit.
   - Ist A positiv semidefinit, so gilt für alle Hauptunterdeterminanten $\det(A_{(k)}) \geq 0$ für alle $1 \leq k \leq n$.
   - Es gibt Matrizen, für deren sämtliche Hauptunterdeterminanten $\det(A_{(k)})$ gilt $\det(A_{(k)}) \geq 0$, die aber indefinit sind.

4 Gleichungssysteme

1. Mit welchen Verfahren kann man Gleichungssysteme lösen, wenn bekannt ist, dass sie mehrdeutig lösbar sind ?

2. Wann ist ein inhomogenes Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ?

3. Unter welchen Bedingungen hat ein Gleichungssysteme von n Gleichungen und n Unbekannten **keine** Lösung ?

4. Wann ist ein inhomogenes Gleichungssystem $Ax = b$ **eindeutig** lösbar ?

5. Welche Voraussetzung muss erfüllt sein, um die Cramersche Regel zum Lösen eines Gleichungssystems, anwenden zu können ?

6. Es sei K ein Körper und $A \in K^{m \times n}$. Entscheide ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
   - Das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ ist nur lösbar, falls $\text{rang}(A) = m$ gilt.
   - Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn der Rang von A mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmt.
   - Ist $m = n$ und $\det(A) \neq 0$, so ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar.
   - Ist K ein unendlicher Körper, so hat jedes lineare Gleichungssystem der Form $Ax = b$ unendlich viele Lösungen.

7. Unter welchen Bedingungen ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$
   - für eine feste rechte seite lösbar ?
   - für jede rechte Seite lösbar ?
   - höchstens eindeutig lösbar ?

8. Entscheide ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Die Lösungsmenge eines Linearen Gleichungssystems über einem Körper wird nicht verändert, wenn man...
   - ...ein geeignetes Vielfaches einer Zeile auf eine andere Zeile addiert.
   - ...eine beliebige Zeile streicht.
   - ...beliebig viele Nullzeilen streicht.
   - ...eine Zeile mit einem beliebigen Körperelement multipliziert.

5 Matrizen allgemein

1. Sind Matrizen im Allgemeinem kommutativ bezüglich der Multiplikation? Falls nicht, gib ein Gegenbeispiel an.
2. Was ist das Minimalpolynom einer Matrix ? In welcher Beziehung steht es zum charakteristischen Polynom dieser Matrix ?
3. Welche Bedeutung haben die Nullstellen des charakteristischen Polynoms einer quadratischen Matrix ?
4. Was versteht man unter den Begriff nilpotente Matrix und wie erkennt man, dass eine Matrix nilpotent ist ?
5. Was versteht man unter den Begriff „normale“ Matrix? Was sind ihre Besonderheiten ?
6. Wann hat eine nichtquadratische Matrix eine Inverse ?
7. Formuliere in einem kurzen Satz, was der Rang einer Matrix ist.
8. Beschreibe folgende Begriffe in jeweils einem Satz: Einheitsmatrix, symmetrische Matrix, inverse Matrix.
9. Sei A eine symmetrische n x n Matrix. Ist das Inverse A^{-1} ebenfalls symmetrisch ?
10. Unter welchen Bedingungen kann man zwei Matrizen A und B miteinander multplizieren ?
11. Wann heißt eine komplexe n x n Matrix unitär ?
12. Was versteht man unter den Begriff: „Signatur“ einer Matrix ?
13. Zeige oder widerlege folgende Aussage: Eine Matrix A ist genau dann normal, wenn A unitär diagonalisierbar ist.
14. Geben jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann unitär diagonalisierbar, falls...
    - A normal ist.
    - A hermitsch ist.
    - für jeden Eigenwert von A, die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit ist.
    - wenn es von $\mathbb{C}^n$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A gibt.
15. „Zu jeder invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert eine Permutationmatrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ derart, daß $PA = LR$ gilt, wobei L eine untere Dreiecksmatrix mit $l_{ii} = 1$ für i = 1, ..., n und R ist obere Dreiecksmatrix ist.“ Gilt diese Aussage ?
16. Es sei K ein Körper und $A, B \in K^{n\times n}$. Entscheide ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
    - Ist T eine invertierbare Matrix, dann ist $\mathrm{spur}(A) = \mathrm{spur}(T^{-1}AT)$.
    - $\mathrm{spur}(A) + \mathrm{spur}(B) = \mathrm{spur}(A + B)$.
    - Für eine natürliche Zahl m ist $\mathrm{spur}(m \cdot A) = m\cdot$ spur (A).
    - Sind A und B verschiedene Matrizen, dann unterscheiden sich auch die zugehörigen **charakteristischen Polynome** $\chi(A)$ und $\chi(B)$.
    - $\chi(A \cdot B) = \chi(A) \cdot \chi(B)$.
    - $\chi(A + B) = \chi(A) + \chi(B)$.
17. Seien A, B reelle quadratische $n \times n$ Matrizen. Entscheide ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
    - Zu jedem Eigenwert λ von A gibt es mindestens einen reellen Eigenvektor.

- Ist $v \in \mathbb{R}^n$ und $Av = \lambda v$, dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Ist $\operatorname{rang}(A) = n$, dann bilden die Spalten von A eine Basis von $\mathbb{R}^n$.
- A ist genau dann invertierbar, wenn jeder Eigenwert $\lambda \neq 0$.
- A ist genau dann invertierbar, wenn alle Eigenwerte verschieden sind und in $\mathbb{R}$ liegen.
- A ist genau dann invertierbar, wenn die Zeilen von A eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden.
- Ist λ ein Eigenwert von A und μ ein Eigenwert von B, dann ist $\lambda \cdot \mu$ ein Eigenwert von $A \cdot B$.
- Besitzen A und B den selben Eigenwert λ und sind v bzw. w Eigenvektoren von A bzw. B zu diesem ist gemeinsamen Eigenwert, dann ist $v + w$ ein Eigenvektor von $A + B$.
- Ist $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, dann ist v ein Eigenvektor von A^n zum Eigenwert $n \cdot \lambda$.

18. Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$. Entscheide ob die Aussage wahr oder falsch ist. Ist A symmetrisch und

    - K beliebig,
    - $K = \mathbb{C}$,
    - $K = \mathbb{R}$,
    - $K = \mathbb{Q}$,
    - $K = \mathbb{F}_2$,

    dann ist A orthogonal über K diagonalisierbar.

19. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und J eine Jordan-Form von A. Entscheide ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

    - Ist A diagonalisierbar, dann gibt es von A keine Jordan-Form.
    - Die Anzahl der Jordanblöcke zu einem Eigenwert λ entspricht der Dimension des zu λ gehörenden Eigenraums.
    - Besteht J aus genau einem Jordanblock, dann ist die algebraische Vielfachheit eines jeden Eigenwerts von A gleich seiner geometrischen Vielfachheit.
    - Die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A legen J fest - bis auf Permutation der Blöcke.
    - Ist J auch Jordan-Form der Matrix $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, dann gibt es eine invertierbare Matrix X mit $X^{-1}AX = B$.
    - Es sei T eine Matrix mit $T^{-1}AT = J$. Vertauscht man zwei beliebige Spalten von T, dann werden in J zwei Jordanblöcke vertauscht.

6 Weiterführende Information zum Dokument

Dieses Dokument wird fortlaufend aktualisiert und korrigiert, für Hinweise auf Fehler bzw. unklare Aufgabenstellung sind wir sehr dankbar. Die aktuellste Version dieses Dokuments befindet sich auf der folgenden Webseite: <Halvani.de>